Tópicos em Matemática

Escola de Verão 2017 PPgMAE/UFRN

1- Mostre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1) \cdot n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$, $n = 2,3,4, \dots$

2- Ache a fórmula fechada para o produto $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $n = 2,3,4, \dots$ e demonstre o seu resultado por indução.

3- Mostre que $\sqrt{7}$ é irracional.

4- Seja $I_n = \{1,2,3, \dots, n\}$ e $f: I_n \to I_n$

(a) Mostre que f é injetiva se e somente se f é sobrejetiva.
(b) O resultado é verdadeiro se I_n é substituído por $\mathbb{N}$?

5- Mostre que $|x-1| + |x-3| + |x-5| + |x-7| \geq 8$

6- (A) Suponha que A, B sejam conjuntos não vazios de números reais, tais que $a \leq b$ para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$. Mostre que $supA \leq infB$.

(B) Suponha que para todo $\epsilon > 0$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $b - a < \epsilon$. Mostre que $supA = infB$

7- Mostre que se $x_n \to a > 0$, então $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ temos $x_n > 0$.

8- Suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$ e $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c,\ c < 1$. Mostre que $x_n \to 0$.

9- Suponha que $x_1 > 0$ e que $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$, $n = 1,2,3, \dots$. Mostre que $x_n \to 0$.

10- Mostre que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$. (Dica: use o fato que para todo $a > 1$, $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$)