

**Exame de Admissão ao Mestrado**  
**27/01/2017 - DEST/UFRN**

**Instruções**

- (i) A prova é individual, sem consultas e o uso de calculadora não é permitido.  
(ii) Sempre justifique suas respostas.

1. (2 Pontos) Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição Binomial de parâmetros  $n$  e  $p$ . Determine:

(a)  $\mathbb{E} \left( \frac{1}{X+1} \right)$ ;

(b)  $\mathbb{E} \left( \frac{X!(n-k)!}{(X-k)!n!} \right)$ .

2. (2 Pontos) Considere três urnas. A urna 1 contém uma bola branca e  $2n - 1$  bolas verdes, a urna 2 contém  $n$  bolas brancas e  $n$  bolas verdes e a urna 3 contém  $2n - 1$  bolas brancas e uma bola verde, com  $n \in \{1, 2, \dots\}$ . Considere o experimento que consiste em retirar uma bola ao acaso de uma das urnas e registrar a sua cor. Suponha que a probabilidade inicial (anterior à informação do resultado do experimento) da bola ter sido extraída da urna  $i$  seja  $p_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  com  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ .

- (a) Qual a probabilidade de ter sido extraída uma bola branca?  
(b) Qual a probabilidade da bola ter sido extraída da urna 1 dado que a bola retirada é branca?

3. (2 Pontos) Prove os resultados abaixo.

- (a) Sejam  $A, B$  e  $C$  eventos associados a um experimento, então

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) - 2\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

- (b) Se  $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$  e  $\mathbb{P}(B \cap C^c) > 0$ , então

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B \cap C^c)\mathbb{P}(C^c|B)$$

4. (2 Pontos) Suponha que  $X$  é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{k}{2^x} I_{\{1,2,3,4\}}(x)$$

- (a) Determine o valor de  $k$ ;
- (b) Obtenha a função de distribuição de  $X$  e esboce o seu gráfico;
- (c) Calcule a variância de  $X$ .

5. (2 Pontos) Um dado é lançado duas vezes. Considere os eventos?

$A$  : Obtém-se 2 ou 5 no primeiro lançamento.

$B$  : A soma das faces obtidas nos dois lançamentos é pelo menos 7.

$C$  : A soma das faces é par.

$D$  : A soma das faces obtidas é divisível por 3.

- (a)  $A$  e  $B$  são independentes?
- (b)  $C$  e  $D$  são independentes?